文章编号:1000-4939(2023)05-1050-08

微尺度载流纳米板在磁场中的磁弹性随机振动

王佳悦[1,2],王平[1,2]

(1. 燕山大学建筑工程与力学学院,066004 秦皇岛;
2. 燕山大学河北省重型装备与大型结构力学可靠性重点实验室,066004 秦皇岛)

摘　要:研究了四边简支矩形微板在磁场及随机电流作用下的磁弹性随机振动问题。应用非局部弹性理论和板壳磁弹性理论建立外加磁场中载流微板的运动方程,导出了微板的磁弹性随机振动方程;采用模态分析法对其进行了位移响应分析,得到了在通入平稳和非平稳随机电流时微板的随机位移响应的均值、功率谱密度函数等数字特征。针对具体算例,在通入平稳随机电流的情形下,得到了位移响应的功率谱密度函数,并绘出了板中心点的位移响应功率谱密度图。结果表明:耦合项对振动响应带宽有很大的影响,当考虑耦合项时,振动能量主要分布在 0 ~ 20 Hz 带宽范围内,且随着随机电流和磁场强度的增加,振动能量集中分布带宽变窄。根据此性质可以有效地降低振动的发生或减少振动的破坏,对微结构系统的结构检测和故障诊断等问题起到参考作用。

关键词:微板;磁弹性;随机振动;功率谱密度函数

中图分类号:O324　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.05.010

Magnetoelastic random vibration of micro-scale current-carrying nanoplates in a magnetic field

WANG Jiayue[1,2],WANG Ping[1,2]

(1. College of Sciences,Yanshan University,066004 Qinhuangdao,China;2. Key Laboratory of Mechanical Reliability for Heavy Equipments and Large Structures of Hebei Province,Yanshan University,066004 Qinhuangdao,China)

Abstract:The magnetoelastic random vibration of a simply supported rectangular micro-plate with four sides under the action of magnetic field and random current is studied. The non-local elastic theory and the plate-shell magnetoelastic theory are used to establish the motion equation of the current-carrying micro-plate in an external magnetic field,and the magnetoelastic random vibration equation of the micro-plate is derived;the displacement response is analyzed by the modal analysis method,and the numerical characteristics such as the mean value of the random displacement response of the micro-plate and the power spectral density function when the steady and non-stationary random current are applied. For a specific example,in the case of a steady random current,the power spectral density function of the displacement response is obtained,and the displacement response power spectral density diagram of the center point of the

收稿日期:2022-11-04　　**修回日期**:2023-07-05
基金项目:河北省自然科学基金资助项目(No. A2016203101);河北省高等学校科学技术研究青年基金资助项目(No. 2015233)
通信作者:王平,教授。E-mail:wangping0721@163.com
引用格式:王佳悦,王平. 微尺度载流纳米板在磁场中的磁弹性随机振动[J]. 应用力学学报,2023,40(5):1050-1057.
WANG Jiayue,WANG Ping. Magnetoelastic random vibration of micro-scale current-carrying nanoplates in a magnetic field[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(5):1050-1057.

plate is drawn. The results show that the coupling term has a great influence on the vibration response bandwidth. When considering the coupling term, it is mainly distributed in the range of 0 – 20 Hz. With the increase of random current and magnetic field strength, the bandwidth of the concentrated distribution of vibration energy becomes narrower. According to this property, it can effectively reduce the occurrence of vibration or reduce the damage of vibration, and play a reference role in structure detection and fault diagnosis of the micro-structure system.

Key words: micro-plate; magnetoelastic; random vibration; power spectral density function

随着纳米技术的发展,人们对微观领域的认识进入了一个新的阶段。各种机械装置、电子板逐渐趋于微型化,如微型传感器、微纳米芯片、微型陀螺仪等,与此同时,需建立与传统宏观理论不同的研究方法[1]。目前对纳米板的振动特性和力学性能进行了广泛的研究,李郑梁等[2]采用非局部弹性理论研究了考虑高阶表面效应的纳米板的屈曲分析,讨论了非局部效应和高阶表面效应对屈曲载荷的影响。SHARIFI 等[3]基于非局部应变梯度理论,研究了功能梯度压电纳米板的振动;沈纪苹等[4]应用非局部理论结合基尔霍夫压电薄板模型,研究了轴向运动压电纳米板的热-力-电耦合振动响应, HASHEMI 等[5]根据考虑小尺度效应的非局部 Mindlin 板理论,提出了矩形纳米板屈曲分析的解析解;刘辰[6]采用非局部理论构建了非局部压电纳米板的模型,由此对其振动和稳定性问题进行了研究。

大量学者也十分注重对磁弹性随机振动问题的研究。LIANG 等[7]基于经典的磁弹性模型,进行了倾斜磁场作用下磁性板自由振动的实验研究。HASANYAN 等[8]通过多尺度法针对弱磁场和高电导率两种特殊情况,获得了非线性基频的解析解。WANG[9]建立了铁磁介质在外加磁场中磁弹性相互作用的动力学模型,给出了铁磁杆固有频率的变化。HOSSEINI 等[10]研究了旋转的双向功能梯度多孔磁弹性纳米尺寸圆盘的自由振动。白象忠等[11]系统地研究了在各种边界条件下薄板的磁弹性振动问题。王平等[12]研究了简支微梁在磁场中的随机振动问题。

综上所述,目前大多数学者对宏观的薄板、直杆等的磁弹性随机振动的研究较为广泛,尚未查阅到关于纳米板的磁弹性随机振动的研究。本研究根据非局部弹性理论及板壳磁弹性理论,推导了微板磁弹性随机振动方程,还得到了洛伦兹力和力矩的表达式,把洛伦兹力的一部分假定为该板的一种阻尼,其余则假定为随机分布荷载,然后研究了纳米板位移响应。最后应用算例,得到了通入平稳随机电流的四边简支纳米板在外加磁场环境下的随机位移响应的均值、功率谱密度函数等数字特征。

1　基本方程

根据基尔霍夫板理论,板内任意一点(x,y,z)沿(x,y)方向的位移分别为

$$\begin{cases} U(x,y,z,t) = u(x,y,t) - z\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ V(x,y,z,t) = v(x,y,t) - z\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \tag{1}$$

式中: u,v,w 分别表示板中面变形后所考察点在 x, y, z 方向的位移; U, V 为 x, y 方向变形后的位移。

应变分量为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - z\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} - 2z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{2}$$

式中: ε_x, ε_y 分别表示 x, y 方向的正应变; γ_{xy} 表示切应变。

板的物理方程为

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \tag{3}$$

式中: σ_x, σ_y 分别表示 x, y 方向的正应力; τ_{xy} 表示切应力; E 表示拉伸弹性模量; G 表示剪切弹性模量; μ 表示泊松比,且三者满足 $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$。

ERINGEN[13]提出的非局部弹性理论中,应力应变关系表述为

$$[1 - (e_0\xi)^2 \nabla^2]\sigma_{ij}^{nl} = \sigma_{ij} \tag{4}$$

式中：e_0 为非局部材料常数；ξ 为描述内特征长度的参数；$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为拉普拉斯算子；σ_{ij}^{nl} 为非局部应力分量；σ_{ij} 为经典应力。

把式(4)中的经典应力当作非局部应力的零阶近似，在进行无限次迭代后取其极限就能求得非局部应力的级数表示为[14]

$$\sigma_{ij}^{nl} = \sigma_{ij} + (e_0\xi)^2 \nabla^2\sigma_{ij} + (e_0\xi)^4 \nabla^4\sigma_{ij} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (e_0\xi)^{2k} \nabla^{2k}\sigma_{ij} \tag{5}$$

非局部内力偶矩为

$$\begin{cases} M_x = -D\sum_{k=0}^{\infty} (e_0\xi)^{2k} \nabla^{2k}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\sum_{k=0}^{\infty} (e_0\xi)^{2k} \nabla^{2k}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} = -D(1-\mu)\sum_{k=0}^{\infty} (e_0\xi)^{2k} \nabla^{2k}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{6}$$

式中：M_x,M_y 分别表示 x,y 方向的弯矩；M_{xy} 表示扭矩。D 为板的抗弯刚度，且 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$，这里 h 为板厚。

板的磁弹性运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + P_x + f_x = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y + f_y = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P_z + f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x - N_x\theta_x - N_{xy}\theta_y + m_x = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - N_y\theta_y - N_{xy}\theta_x + m_y = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \end{cases} \tag{7}$$

式中：N、Q（下标为 x、y）分别为矩形板中面上单位长度上的轴向力和剪力；N_{xy} 为平错力；M_{xy} 为扭矩；m_x、m_y 为电磁力矩；P、f（下标为 x、y、z）分别为矩形板 x、y、z 方向上的外加荷载和电磁力；h 为板厚；ρ 为材料的质量密度。

只考虑几何线性的情况下，令 $N_x = 0$，$N_y = 0$，$N_{xy} = 0$。将式(7)后两项代入第三项，可得微板的振动方程，即

$$D\sum_{k=0}^{\infty} (e_0\xi)^{2k} \nabla^{2k}\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f_z + P_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \tag{8}$$

式中：$w(x,y,t)$ 为矩形板的横向位移；∇^4 表示重调和算子，定义为 $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \times \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$。

2 磁弹性随机振动方程

如图 1 所示，长度和宽度分别为 a、b 的四边简支矩形微板，其板厚为 h，在外加磁场 $B(B_x,0,0)$ 的环境下，通入电流密度矢量为 $J(J_{clx},J_{cly},0)$ 的随机电流，采用笛卡尔坐标系 $O-xyz$。

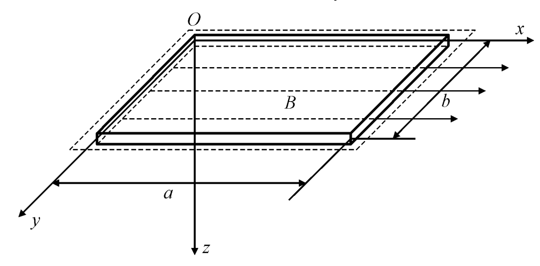


图 1 磁场中的四边简支微板

Fig. 1 Four-sided and simply supported micro-plate in a magnetic field

矩形微板横向运动的偏微分方程为

$$D\sum_{k=0}^{\infty} (e_0\xi)^{2k} \nabla^{2k}\nabla^4 w + C_1 I_x \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + C_1 I_y \frac{\partial^5 w}{\partial y^4 \partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \tag{9}$$

式中：C_1 为板内线阻尼系数；$I_x = \frac{ah^3}{12}$,$I_y = \frac{bh^3}{12}$ 为惯性矩。

假设微板略去极化、磁化和位移电流的影响，可得洛伦兹力的表达式为

$$f_p = J' \times B \tag{10}$$

则有

$$f_p = J_{clx} \times B + J \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ J_{clx} & J_{cly} & 0 \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ J_x & J_y & 0 \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(J_{cly} \times B_x + J_y \times B_x)k \tag{11}$$

$$J_y = \sigma\left(e_y + \frac{\partial w}{\partial t}B_x\right) \tag{12}$$

式中：J_y 为微板内产生的感应电流强度沿着 y 轴方向上的分量；σ 为电导率。

把上式展开后将方程两边对 z 积分能够得到此时电磁力各分量沿着坐标轴方向上的表达式为

$$f_x = 0, f_y = 0, f_z = \int_{-h/2}^{h/2} -(J_{cly} \times B_x + J_y \times B_x)\mathrm{d}z \tag{13}$$

电磁力矩为

$$m_x = 0, m_y = 0 \tag{14}$$

将式(10)~(14)代入式(8)~(9)，在不考虑感应电场强度以及外部介质的黏性阻尼的情况下，假定也没有随机荷载 $P(x,y,t)$，能够求得电磁场中微板的磁弹性随机振动方程，即

$$D\sum_{k=0}^{\infty}(e_0\xi)^{2k}\nabla^{2k}\nabla^4 w + \sigma h B_x^2\frac{\partial w}{\partial t} + C_1 I_x\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial t} + C_1 I_y\frac{\partial^5 w}{\partial y^4\partial t} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -B_x h J_{cly}(t) \tag{15}$$

3　载流简支微板的位移随机响应

3.1　通入平稳随机电流时简支微板的位移响应

随机干扰 $P(x,y,t)$ 与空间位置没有关系，只受时间影响。其可以在一般工程中表示为[15]

$$P(x,y,t) = Q(x,y)f(t) \tag{16}$$

式中：$Q(x,y)$ 为位置坐标 x,y 的确定性函数的分布力；$f(t)$ 为时间 t 的随机过程；$P(x,y,t)$ 的均值以及自相关函数分别表示为

$$m_p(x,y,t) = Q(x,y)m_f(t) \tag{17}$$

$$\begin{aligned}R_p(x_1,y_1,x_2,y_2;t_1,t_2) &= E[P(x_1,y_1,t_1)P(x_2,y_2,t_2)] \\ &= Q(x_1,y_1)Q(x_2,y_2)R_f(t_1,t_2)\end{aligned} \tag{18}$$

式中，$R_f(t_1,t_2)$ 为随机过程 $f(t)$ 的自相关函数。

将式(15)中 $\sigma h B_x^2\frac{\partial w}{\partial t}$ 假定为微板的一种阻尼，而 $-B_x h J_{cly}(t)$ 假定为一种随机分布荷载 $P(x,y,t)$，那么微板通入平稳随机电流时，可由式(17)~(18)计算出随机分布荷载的均值以及相关函数，即

$$\begin{aligned}&m_p(x,y,t) = -B_x h m_{cly}(t), \\ &R_p(x_1,y_1,x_2,y_2;t_1,t_2) = B_x^2 h^2 R_{cly}(t_1,t_2)\end{aligned} \tag{19}$$

式中：t_1、t_2 为加载过程中的两个任意时刻；$m_p(x,y,t)$ 为随机分布荷载 $P(x,y,t)$ 的均值；$m_{J_{cly}}(t)$ 为随机电流 J_{cly} 的均值；$R_{J_{cly}}(t_1,t_2)$ 为随机电流 $J_{cly}(t)$ 的自相关函数。这种情况下，随机分布力在空间分布上没有相关性，但在时间分布上为却是平稳的。

应用模态分析法，微板的磁弹性随机振动方程(15)的位移响应可表示为

$$w(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(x,y)Y_{ij}(t) \tag{20}$$

式中：$Y_{ij}(t)$ 为第 (i,j) 阶主振型对应的模态响应；$\varphi_{ij}(x,y)$ 则表示板的第 (i,j) 阶固有振型。

四边简支微板的边界条件表示为

$$\begin{cases} x=0,a, & w=0, & M=0 \\ y=0,b, & w=0, & M=0\end{cases} \tag{21}$$

可得到符合边界条件的固有模态函数表示为

$$\varphi_{ij} = \sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b} \tag{22}$$

将式(20)、(22)[16]代入式(15)，同时在方程两边乘以 $\varphi_{kl}(x,y)$，对 x 从 0 积分到 a，对 y 从 0 积分到 b，能够得到

$$D\sum_{k=0}^{\infty}(e_0\xi)2k\nabla^{2k}ab\left[\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{j\pi}{b}\right)^2\right]^2 Y_{ij}(t) + \rho hab\ddot{Y}_{ij}(t) + ab\left[C_1 I_x\left(\frac{i\pi}{a}\right)^4 + C_1 I_y\left(\frac{j\pi}{b}\right)^4 + \sigma h B_x^2\right]\dot{Y}_{ij}(t) = -4B_x h J_{cly}(t)\int_0^a\int_0^b\varphi_{ij}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{23}$$

整理得

$$\ddot{Y}_{ij}(t) + 2\zeta_{ij}\omega_{ij}\dot{Y}_{ij}(t) + \omega_{ij}^2 Y_{ij}(t) = G_{ij}(t) \tag{24}$$

式中的 $G_{ij}(t)$ 为模态激励，可表示为

$$G_{ij}(t) = -\frac{-4B_x h J_{cly}(t)}{\rho hab}\int_0^a\int_0^b\varphi_{ij}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{25}$$

第 (i,j) 阶模态阻尼为

$$2\zeta_{ij}\omega_{ij} = \frac{C_1 h^3}{12\rho h}\left[a\left(\frac{i\pi}{a}\right)^4 + b\left(\frac{j\pi}{b}\right)^4\right] + \frac{\sigma h B_x^2}{\rho h} \tag{26}$$

式中，$\frac{\sigma h B_x^2}{\rho h}$ 为阻尼耦合项。

微板的固有频率为

$$\omega_{ij} = \left[\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{j\pi}{b}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(e_0\xi)2k\times\pi^{2k}\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)^k}{\rho h}} \tag{27}$$

显然,当非局部参数 $e_0\xi = 0$ 时,将回到经典的薄板固有圆频率结果。

假设系统的初始条件为零,则常微分方程组(24)的解就能表示为

$$Y_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(t-\tau)h_{ij}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{28}$$

式中,$h_{ij}(\tau)$ 是模态脉冲响应函数,且

$$h_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ij}(\omega)\mathrm{e}^{-\lambda\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{29}$$

频率响应函数 $H_{ij}(\omega)$ 和脉冲响应函数 $h_{ij}(t)$ 构成傅里叶变换对。对应的模态频率响应函数表示为

$$H_{ij}(\omega) = \frac{1}{\omega_{ij}^2 - \omega^2 + 2\lambda\zeta_{ij}\omega_{ij}\omega} \tag{30}$$

由式(20)和式(28),得微板的随机振动响应表达为

$$w(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)\int_{-\infty}^{+\infty} G_{ij}(t-\tau)h_{ij}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{31}$$

通入平稳随机电流时,可知此时的随机分布载荷是平稳的随机函数。其在空间上同样没有相关性,但在时间上的分布是平稳的。相关函数只是时间差 τ 以及位移的函数 $R_P(\tau,x_1,x_2;t_1,t_2) = h^2B_x^2R_{J_{cly}}(\tau)$,功率谱密度是 $S_P(\omega,x_1,x_2,y_1,y_2) = h^2B_x^2S_{J_{cly}}(\omega)$。

位移响应的均值表达式为

$$m_w(x,y,t) = E[w(x,y,t)] = \left(\frac{-4B_xh}{\rho hab}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y) \times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a\int_0^b \varphi_{ij}(u,v)m_{J_{sy}}h_{ij}(\tau)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\tau \tag{32}$$

位移响应的相关函数表达式为

$$\begin{aligned}R_w(x,y,t_1,t_2) = &\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y) \times E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}G_{ij}(t_1-\tau_1)h_{ij}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\int_{-\infty}^{+\infty}G_{kl}(t_2-\tau_2)h_{kl}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\right] = \\ &\left(\frac{4B_xh}{\rho hab}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b\varphi_{ij}(u_1,v_1)\varphi_{kl}(u_2,v_2)h_{ij}(\tau_1)h_{kl}(\tau_2)\times \\ &R_{J_{cly}}(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}v_2\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2 = \left(\frac{4B_xh}{\rho hab}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\times \\ &\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b H_{ij}(\omega)H_{kl}(-\omega)\varphi_{ij}(u_1,v_1)\varphi_{kl}(u_2,v_2)\times \\ &S_{J_{cly}}(\omega)\exp[-\lambda\omega(t_1-t_2)]\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}v_2\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{33}$$

位移响应的功率谱密度函数表达式为

$$\begin{aligned}S_w(\omega,x,y,t) = &\left(\frac{4B_x}{\rho ab}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\times \\ &\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b H_{ij}(\omega)H_{kl}(-\omega)\varphi_{ij}(u_1,v_1)\varphi_{kl}(u_2,v_2)\times S_{J_{cly}}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}v_2\end{aligned} \tag{34}$$

若考虑通入的是零均值平稳白噪声情形的随机电流,位移响应的功率谱密度函数表达式为

$$\begin{aligned}S_w(\omega,x,y) = &S_{J_{cly}}(\omega)\left(\frac{4hB_x}{\rho hab}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}\times \\ &\frac{\left(\int_0^a\int_0^b\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^a\int_0^b\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)}{(\omega_{ij}^2-\omega^2)^2+(2\zeta_{ij}\omega_{ij}\omega)^2} = \\ &S_{J_{cly}}(\omega)\left(\frac{4B_xh}{\rho hab}\right)^2\left(\frac{4ab}{\pi^2}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{i\pi x}{a}\sin^2\frac{j\pi y}{b}}{(\omega_{ij}^2-\omega^2)^2+(2\zeta_{ij}\omega_{ij}\omega)^2}\end{aligned} \tag{35}$$

3.2 通入非平稳随机电流时简支微板的位移响应

当通入非平稳随机电流时的位移响应均值

$$m_w(x,y,t) = E[w(x,y,t)] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a\int_0^b\left(\frac{-4B_xh}{\rho hab}\right)m_{J_{sy}}\times\varphi_{ij}(u,v)g(t)h_{ij}(\tau)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\tau \tag{36}$$

式中,$g(t)$ 是关于时间 t 的函数。

位移响应的相关函数为

$$R_w(x,y,t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\times E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}G_{ij}(t_1-\tau_1)h_{ij}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\int_{-\infty}^{+\infty}G_{kl}(t_2-\tau_2)h_{kl}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\right]=$$

$$\left(\frac{4B_xh}{\rho hab}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)g(t_1)g(t_2)\times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b\varphi_{ij}(u_1,v_1)\varphi_{kl}(u_2,v_2)h_{ij}(\tau_1)h_{kl}(\tau_2)\times$$

$$R_{J_{cly}}(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}v_2\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2=\left(\frac{4B_xh}{\rho hab}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b H_{ij}(\omega)H_{kl}(-\omega)\varphi_{ij}(u_1,v_1)\varphi_{kl}(u_2,v_2)g(t_1)g(t_2)\times$$

$$S_{J_{cly}}(\omega)\exp[-\lambda\omega(t_1-t_2)]\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}v_2\mathrm{d}\omega \tag{37}$$

位移响应的功率谱密度函数为

$$S_w(\omega,x,y,t)=\left(\frac{4B_x}{\rho ab}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\times\int_0^a\int_0^b\int_0^a\int_0^b H_{ij}(\omega_1)H_{kl}(-\omega_2)\varphi_{ij}(u_1,v_1)\varphi_{kl}(u_2,v_2)\times$$

$$S_{J_{cly}}g^2(t)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}v_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}v_2 \tag{38}$$

4　算　例

取一四边简支矩形微板，长为 $a=600$ nm，宽为 $b=400$ nm，厚为 $h=5$ nm，非局部参数为 $e_0\xi=1$ nm，弹性模量为 $E=1.6\times10^9$ Pa，泊松比为 $\mu=0.3$，密度为 $\rho=7\ 500$ kg/m³。板内阻尼系数为 $C_1=0.04$。电磁场的特征参数为 $B_x=4$ T，电导率为 $\sigma=3.63\times10^7\ (\Omega\cdot\mathrm{m})^{-1}$。令 $i=j=1$，k 取到 20。外加电流是平稳随机电流，其电流密度分量 $J_{clx}(t)$ 是一个常数，$S_{J_{clx}}(w)=4\times10^{12}\ (\mathrm{A/m^2})^2$ Hz，这种情况下的激励为平稳随机激励。只需考虑四边简支微板的一阶的固有频率以及固有振型，即

$$\omega_{11}=\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]\sqrt{\frac{D\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(e_0\xi)2k\times\pi^{2k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^k}{\rho h}}=1\ 969\ \mathrm{rad/s},\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{ij}(x,y)=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{39}$$

考虑式(26)中的存在耦合项和不存在耦合项的情况，再将式(39)和 $x=\dfrac{a}{2}$，$y=\dfrac{b}{2}$，以及算例中所给参数代入式(35)，可以计算板中心点功率谱密度函数，如图 2 所示。

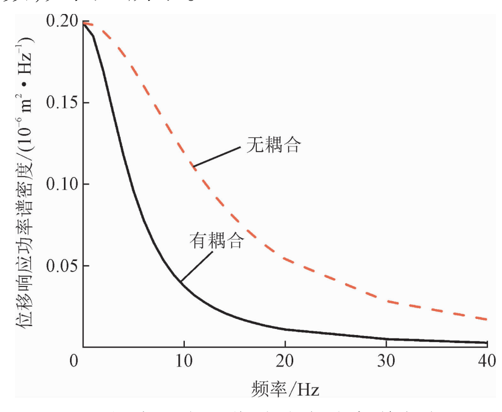


图 2　板中心点的位移响应功率谱密度图

Fig. 2　Displacement response power spectral density diagram of the center point of the plate

考虑外加电流为平稳随机电流，其电流密度分量 $J_{clx}(t)$ 为一个常数，分别 $S_1=S_{J_{clx}}(w)=2\times10^6\ (\mathrm{A/m^2})^2$ Hz、$S_2=S_{J_{cLx}}(w)=4\times10^6\ (\mathrm{A/m^2})^2$ Hz、$S_3=S_{J_{cLx}}(w)=8\times10^6\ (\mathrm{A/m^2})^2$ Hz 将式(39)和 $x=\dfrac{a}{2}$，$y=\dfrac{b}{2}$ 以及各参数代入式(35)就能计算简支微板随电流密度变化下的位移响应功率谱密度图，如图 3 所示。

将式(26)和 $x=\dfrac{a}{2}$，$y=\dfrac{b}{2}$，$S_{J_{clx}}(w)=4\times10^{12}\ (\mathrm{A/m^2})^2$ Hz 及磁场条件 $B_x=3$ T、$B_x=4$ T、$B_x=5$ T 代入式(35)就能计算出不同磁场条件下四边简支微板的位移响应功率谱密度图，如图 4 所示。

将式(27)和 $x=\dfrac{a}{2}$，$y=\dfrac{b}{2}$，$e_0\xi=1$ nm、$e_0\xi=20$ nm、$e_0\xi=40$ nm 以及各参数代入式(35)就能计算出不同非局部参数下四边简支微板的位移响应功

率谱密度图,如图 5 所示。

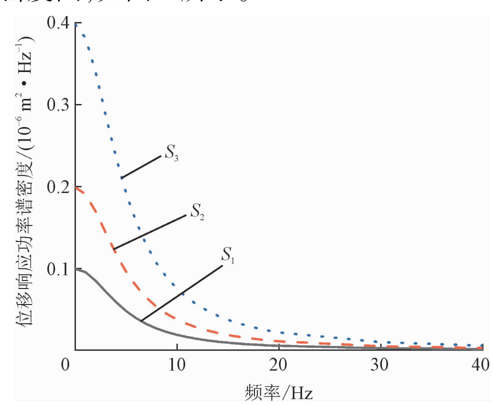


图 3 不同随机电流下简支微板的位移响应功率谱密度图

Fig. 3 Displacement response power spectral density diagram of simply supported micro-plates under different random currents

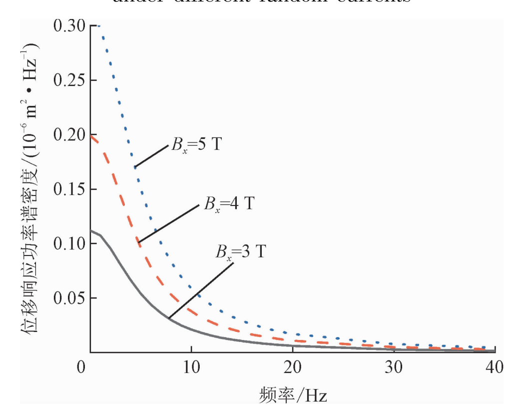


图 4 不同磁场强度下简支微板的位移响应功率谱密度图

Fig. 4 Displacement response power spectral density diagrams of simply supported micro-plates under different magnetic field strengths

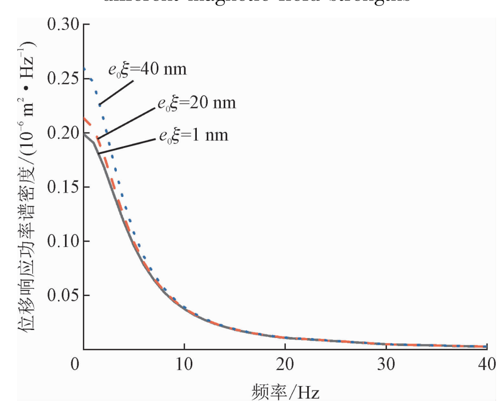


图 5 不同非局部参数下简支微板的位移响应功率谱密度图

Fig. 5 Displacement response power spectral density diagram of simply supported micro-plates under different non-local parameters

令 f = 5 Hz, 通过改变外加磁场强度的取值,即可计算出板中心点位移响应功率谱密度函数的变化量随着外加磁场强度的变化规律,如图 6 所示。

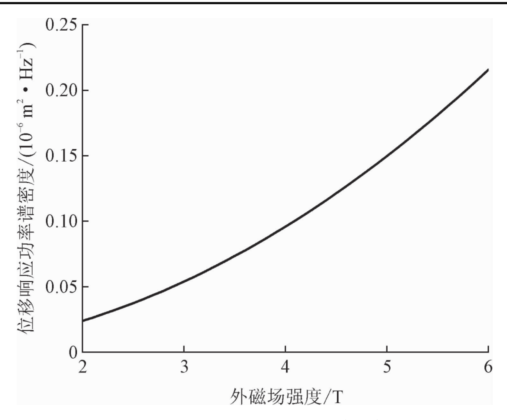


图 6 外磁场强度对位移响应功率谱密度的影响

Fig. 6 The influence of external magnetic field strength on the power spectral density of displacement response

令 f = 5 Hz, 通过改变非局部参数的取值,即可计算出板中心点位移响应功率谱密度函数的变化量随着非局部参数的变化规律,如图 7 所示。

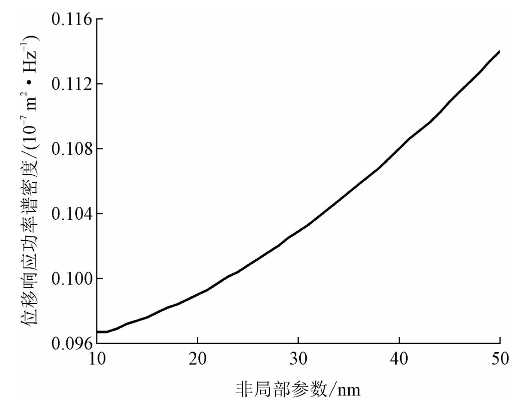


图 7 非局部参数对位移响应功率谱函数的影响

Fig. 7 The influence of non-local parameters on the power spectral density of displacement response

功率谱密度函数图从频域角度说明了振动的统计特性,也表现出了振动能量对频率的变化规律。图 2 反映了振动响应能量在考虑了耦合项的情况下会主要分布在 0 ~ 20 Hz 带宽,不考虑耦合项时,振动响应能量分布在 0 ~ 40 Hz 带宽范围内,可见考虑耦合项时,振动能量带宽更加集中,所蕴含的振动能量的平均密度越大。图 3 ~ 4 反映了在 0 ~ 20 Hz 带宽范围内,当随机电流密度和磁场强度的逐渐增加,振动能量也逐渐增大,振动能量带宽越来越集中。这说明随着随机电流密度和磁场强度的增加,同一带宽范围内所蕴含的振动能量的平均密度也越来越大。因此,变化磁场强度和随机电流密度均可控制微板的振动状态。图 5 反映出固有频率随着非局部参数的增大而较小,从而导致振动能量增大,振动能量带宽更加集中。图 6 ~ 7 定量地反映出当 f = 5 Hz

时,板中心点随着外磁场强度和非局部参数的增大而增大。根据上述性质可以对微结构系统的结构检测和故障诊断等问题中起到参考作用。

5 结　论

1)基于非局部弹性理论及板壳磁弹性理论,给出了外加磁场作用下四边简支纳米板的随机振动方程,并推导了通入平稳和非平稳随机电流该板的位移响应功率谱密度函数。针对具体的算例,对位移随机响应进行了分析,并绘制出了该微板中心点的位移响应功率谱密度图以及不同随机电流和磁场强度下位移响应功率谱密度图。

2)数值计算结果表明:振动响应能量带宽在考虑耦合项时会更集中,主要分布在 0 ~ 20 Hz 之内。此外,随着随机电流和磁场强度的增加,振动能量的平均密度也会提高。随着非局部参数的增加,固有频率减小,使得振动能量带宽更加集中。通过调节随机电流以及磁场强度能有效控制振动能量对频率的分布规律,降低振动的发生或减小振动的破坏,有利于微结构系统的结构检测和故障诊断等问题。

参考文献:

[1] 李敏,段向东,李泉伟. 微机械动力学研究进展[J]. 机械传动,2012,36(6):121-124.
LI Min,DUAN Xiangdong,LI Quanwei. The development status on the study of micro-machine dynamics[J]. Journal of mechanical transmission,2012,36(6):121-124(in Chinese).

[2] 李郑梁,庞苗. 考虑高阶表面效应的非局部纳米板屈曲分析[J]. 科技通报,2018,34(5):7-10.
LI Zhengliang,PANG Miao. Buckling analysis of nanoplates with high-order surface stress effect via nonlocal elasticity[J]. Bulletin of science and technology,2018,34(5):7-10(in Chinese).

[3] SHARIFI Z,KHORDAD R,GHARAATI A,et al. An analytical study of vibration in functionally graded piezoelectric nanoplates: nonlocal strain gradient theory[J]. Applied mathematics and mechanics,2019,40(12):1723-1740.

[4] 沈纪苹,刘金建,李成,等. 轴向运动压电纳米板的非局部热-力-电耦合振动[J]. 振动工程学报,2017,30(3):378-388.
SHEN Jiping,LIU Jinjian,LI Cheng,et al. Thermo-electro-mechanical vibration of axially moving piezoelectric nanoplates[J]. Journal of vibration engineering,2017,30(3):378-388(in Chinese).

[5] HASHEMI S H,SAMAEI A T. Buckling analysis of micro/nanoscale plates via nonlocal elasticity theory[J]. Physica E:Low-dimensional systems and nanostructures,2011,43(7):1400-1404.

[6] 刘辰. 非局部压电纳米板的振动和稳定性研究[D]. 北京:北京交通大学,2016.

[7] LIANG W,SOH A K,HU R L. Vibration analysis of a ferromagnetic plate subjected to an inclined magnetic field[J]. International journal of mechanical sciences,2007,49(4):440-446.

[8] HASANYAN D,LIBRESCU L,QIN Z M,et al. Nonlinear vibration of finitely-electroconductive plate strips in an axial magnetic field[J]. Computers & structures,2005,83(15/16):1205-1216.

[9] WANG X Z. Changes in the natural frequency of a ferromagnetic rod in a magnetic field due to magnetoelastic interaction[J]. Applied mathematics and mechanics,2008,29(8):1023-1032.

[10] HOSSEINI M,MAHINZARE M,GHADIRI M. Magnetic field effect on vibration of a rotary smart size-dependent two-dimensional porous functionally graded nanoplate[J]. Journal of intelligent material systems and structures,2018,29(14):2885-2901.

[11] 白象忠,田振国. 板壳磁弹性力学基础[M]. 北京:科学出版社,2006.

[12] 王平,王东贤,姚杰. 载流简支微梁在磁场中的磁弹性随机振动[J]. 应用力学学报,2020,37(6):2567-2573.
WANG Ping,WANG Dongxian,YAO Jie. Magneto-elastic random vibration of a current carrying simply supported micro-beam in a magnetic field[J]. Chinese journal of applied mechanics,2020,37(6):2567-2573(in Chinese).

[13] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. Journal of applied physics,1983,54(9):4703-4710.

[14] 陈玲,刘金建,李成,等. 基于非局部弹性理论的纳米板横向振动[J]. 力学季刊,2016,37(3):485-492.
CHEN Ling,LIU Jinjian,LI Cheng,et al. Transverse vibration of nanoplates based on nonlocal elasticity theory[J]. Chinese quarterly of mechanics,2016,37(3):485-492(in Chinese).

[15] 胡津亚,曾三元. 现代随机振动[M]. 北京:中国铁道出版社,1989:82-85.

[16] 朱位秋,蔡国强. 随机动力学引论[M]. 北京:科学出版社,2017:115-118.

(编辑　张璐)